UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Topologias fraca e forte sobre espaços normados, uma comparação.

Thiago Henrique Moreira da Cruz

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ORIENTADOR: **Prof. Dr. Leonardo Pellegrini**

São Paulo
2012

Topologias fraca e forte sobre espaços normados, uma comparação.

Este exemplar corresponde à redação final

da dissertação devidamente corrigida e

defendida por Thiago Henrique Moreira da Cruz

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 11 de Julho de 2012.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Leonardo Pellegrini Rodrigues (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo - IME - USP
- Prof. Dr. David Pires Dias - IME - USP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, não só pelo apoio mas principalmente pelo crédito que eles me deram desde o início, sempre acreditando que eu era capaz de terminar este trabalho.

Agradeço também à minha namorada Olivia de Lucas Ferreira por ter acompanhado de perto boa parte do que foi feito aqui. Muitas vezes, mesmo não entendendo muito de matemática, tentava dar sugestões e pensar em ideias de como melhorar o que eu estava fazendo.

Obviamente, sem a orientação, compreensão e paciência do professor Leonardo Pellegrini este texto não existiria. E eu conheceria muito menos do mundo da pesquisa em matemática do que eu conheço hoje.

Finalmente, não posso deixar de agradecer ao IME - USP pelo conhecimento, pelas oportunidades e pelos desafios que essa instituição me proporcionou. Agradeço especialmente aos colegas da habilitação em Métodos Matemáticos pelos memoráveis cafés e bandejões dos últimos anos.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos os resultados de [1], porém em um contexto mais geral em alguns casos. Usaremos as topologias *fraca* e *fraca estrela* sobre espaços normados e seus duais para exibir contraxemplos em topologia. Exibiremos um conjunto que possui a origem como ponto de acumulação mas tal que nenhuma sequência de pontos deste conjunto converge para zero. Mostraremos também que a bola unitária do dual de l_∞ é um conjunto compacto na topologia fraca estrela mas não é sequencialmente compacto nesta topologia. Veremos que tanto um espaço de Banach X como seu dual X^* são espaços de primeira categoria nas topologias fraca e fraca estrela respectivamente. Finalmente, exibiremos uma função que não é contínua mas é sequencialmente contínua.

Sumário

Introdução

Neste trabalho iremos considerar dois tipos de topologia sobre espaços vetoriais normados. Uma delas é a topologia gerada pela norma destes espaços (ou topologia forte), metrizável. A outra topologia é dita topologia *fraca*, em geral não metrizável, que é gerada a partir de uma família de funcionais lineares. Veremos que alguns resultados conhecidos e, eventualmente, intuitivos associados à primeira deixam de valer quando olhamos para espaços munidos de uma topologia *fraca*.

O estudo de pré-requisitos de Análise Funcional foi feito em [2] e [3], e para Topologia utilizamos [4] e [5]. A partir disso vamos apresentar os resultados de [1], porém em um contexto um pouco mais geral em alguns casos.

No Capítulo 1 enunciaremos algumas proposições e definições de topologia que vamos assumir como conhecidos neste trabalho. Ainda neste capítulo vamos definir o conceito de redes em espaços topológicos. Veremos que estas podem ser vistas como uma generalização de sequências e ainda que algumas caracterizações feitas com sequências em espaços métricos podem, analogamente, ser feitas com redes em espaços topológicos.

Veremos no Capítulo 2 como uma família de funções pode gerar uma topologia sobre um conjunto não vazio qualquer. Uma Topologia assim será dita topologia sigma (ou topologia inicial) e vamos garantir sua existência explicitando uma base para a mesma. Veremos, por exemplo, que a topologia produto é um tipo de topologia sigma. Em seguida teremos resultados e exemplos que serão essenciais nos capítulos posteriores. No fim do capítulo vamos nos restringir ao estudo de espaços vetoriais, o que será importante para o capítulo seguinte.

No Capítulo 3 introduzimos os conceitos de topologia *fraca* e *fraca estrela* sobre espaços normados e seus duais, e assim veremos que estas topologias são casos particulares da topologia sigma. Provaremos alguns resultados que serão utilizados na comparação com a topologia da norma no capítulo final.

Finalmente, o Capítulo 4 possui os resultados de [1] e ainda alguns resultados a mais. Vamos mostrar como propriedades da topologia da norma deixam de valer quando consideramos a topologia sigma. Exibiremos um subconjunto de um espaço de Hilbert munido da topologia *fraca* que possui a origem como ponto de acumulação e tal que nenhuma sequência de pontos deste conjunto converge para zero. Apesar disso, é possível exibir uma rede que converge para zero com relação à topologia *fraca*. Mostraremos que a bola fechada unitária do dual de um espaço normado é um conjunto compacto com relação à topologia *fraca estrela*, mas não é verdade que toda sequência contida nesta bola admite subsequência convergente. Ou seja, diferentemente do que acontece em espaços métricos, as noções de compacto e sequencialmente compacto não são equivalentes. Sabemos que todo espaço métrico completo é de segunda categoria, mas veremos que tanto um espaço normado munido da topologia *fraca* como seu dual munido da topologia *fraca estrela* são espaços de primeira categoria. Por fim, exibiremos uma função entre espaços vetoriais topológicos que não é contínua mas é sequencialmente contínua. Ou seja, a caracterização de funções contínuas por sequências não é valida em espaços topológicos em geral.

Notação

$\mathbb{N}$	O conjunto dos inteiros estritamente positivos.
$\mathbb{K}$	O corpo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{T}_{\mathbb{K}}$	A topologia usual do corpo $\mathbb{K}$.
$X^{\#}$	O dual algébrico do espaço vetorial X.
X^*	O dual (topológico) do espaço vetorial normado X.
B_X	O conjunto $\{x \in X : \ \|x\| \leq 1\}$.
$B[x,r]$	O conjunto $\{y : \ \|y-x\| \leq r\}$.
$int(A)$	O interior do conjunto A.
$\overline{A}$	O fecho do conjunto A.
$\mathcal{P}(X)$	O conjunto das partes de X.
$\mathrm{Re}(z)$	A parte real do número complexo z.
$[x_i : \ i = 1,\ldots,n]$	Subespaço gerado pelos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Topologia

A seguir enunciamos algumas definições e resultados de topologia que vamos utilizar durante o trabalho. Neste capítulo X será sempre um conjunto não vazio qualquer e $\mathfrak{T}$ uma topologia sobre X.

Lembramos que uma coleção B de subconjuntos de X é dita uma base para $\mathfrak{T}$ se para qualquer elemento Ω de $\mathfrak{T}$ existir $\mathcal{A} \subset B$ tal que $\cup\mathcal{A} = \Omega$.

Proposição 1.1. *Seja X um conjunto não vazio e $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ satisfazendo:*

(i) Para qualquer $x \in X$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$

(ii) Dados $B_1, B_2 \in \beta$ e $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_0 \in \beta$ tal que $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$.

Então,

$$\mathfrak{T} = \{\cup\mathcal{A} : \ \mathcal{A} \subset \beta\}$$

É uma topologia sobre X e β é uma base para esta topologia.

Demonstração: A prova pode ser vista em [4], Pág. 15, Proposição 2.34. □

Lembramos que, dado $x \in X$, uma família $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é dita um sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $\Omega \in \mathfrak{T}$ tal que $x \in \Omega$ existir $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \in U \subset \Omega$. A família $\mathcal{V}$ é dita ainda uma base local para x se todos os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos.

Abaixo temos as definições de alguns axiomas de separação para espaços topológicos:

- $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz T_0 se: dados $x,y \in X$ distintos, existe um aberto $\Omega \in \mathfrak{T}$ tal que $x \in \Omega$ e $y \notin \Omega$ ou $y \in \Omega$ e $x \notin \Omega$.

- $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz T_1 se: dados $x,y \in X$ distintos, existem abertos Ω_1 e Ω_2 em $\mathfrak{T}$ (não necessariamente disjuntos) tais que $x \in \Omega_1$ e $y \notin \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$ e $x \notin \Omega_2$.

- $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz T_2 se: dados $x,y \in X$ distintos, existem abertos Ω_1 e Ω_2 em $\mathfrak{T}$ disjuntos e tais que $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$. Neste caso dizemos também que $(X,\mathfrak{T})$ é um espaço de Hausdorff.

- $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz T_3 se: dados $x \in X$ e um conjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existem abertos Ω_1 e Ω_2 em $\mathfrak{T}$ disjuntos tais que $x \in \Omega_1$ e $F \subset \Omega_2$.

- $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz $T_{3\frac{1}{2}}$ se: dados $x \in X$ e um conjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f[F] = \{1\}$ e $f(x) = 0$.

Dos axiomas de enumerabilidade para espaços topológicos apenas o seguinte é importante para este trabalho:

- Dizemos que $(X,\mathfrak{T})$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade se todo ponto deste espaço admitir um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Neste caso dizemos ainda que $(X,\mathfrak{T})$ é E_1.

Questões sobre compacidade em espaço topológicos também serão abordadas neste trabalho. Enunciamos então o Teorema de Tychonoff, que diz respeito à compacidade de produtos de espaços topológicos compactos.

Teorema 1.2 (Tychonoff). *Todo produto de espaços topológicos compactos é compacto na topologia produto.*

Demonstração: Ver [5], Pág. 234, Teorema 37.3. □

Estudaremos a categoria de alguns espaços topológicos, então as definições abaixo serão necessárias.

Definição 1.3. *Considere um espaço topológico $(X,\mathfrak{T})$ e um subconjunto A de X. Se $int(\overline{A}) = \emptyset$ então dizemos que A é um conjunto raro em X.*

Definição 1.4. *Considere um espaço topológico $(X, \mathfrak{T})$ e um subconjunto A de X. Nestas condições, se existir uma família enumerável $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que valem*

(i) Para todo $B \in \mathcal{B}$, B é raro

(ii) $A = \cup\mathcal{B}$

então dizemos que A é de primeira categoria em X (ou magro em X). Caso esta família não exista, A é dito de segunda categoria.

A seguir um teorema de topologia sobre categorias. Lembramos aqui que se todo aberto não vazio de um espaço topológico for um conjunto de segunda categoria, então dizemos que este espaço é um espaço de Baire.

Teorema 1.5 (Baire)**.** *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração: Ver [5], Pág. 296, Teorema 48.2. □

1.2 Redes em espaços topológicos

A ideia de rede pode ser interpretada como uma generalização do conceito de sequência. Vale lembrar que estas podem ser vistas como funções que possuem $\mathbb{N}$ como domínio e tomam valores em um conjunto qualquer, em particular num espaço topológico.

Podemos dizer que a generalização feita pelas redes está em tomar um conjunto diferente como domínio. As definições abaixo explicitam as condições que esse conjunto deve satisfazer.

Definição 1.6. *Seja* $\mathbf{I}$ *um conjunto não vazio e* $\leq$ *uma relação binária (ou seja, um subconjunto do produto* $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$*) que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Então dizemos que* $\leq$ *é uma ordem parcial sobre* $\mathbf{I}$ *ou ainda que* $\mathbf{I}$ *é parcialmente ordenado (por* $\leq$*).*

Definição 1.7. *Seja* $\mathbf{I}$ *um conjunto parcialmente ordenado. Se para quaisquer* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{I}$ *existir um* $\alpha_0 \in \mathbf{I}$ *tal que* $\alpha_0 \geq \alpha_1$ *e* $\alpha_0 \geq \alpha_2$ *dizemos que* $\mathbf{I}$ *é dirigido.*

Neste trabalho estudaremos redes em espaços topológicos, então a partir das definições acima vamos formalizar este conceito:

Definição 1.8. *Seja* $\mathbf{I}$ *um conjunto dirigido e* X *um espaço topológico, então uma função* $x : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{X}$ *é dita uma rede no espaço topológico* X*.*

A notação utilizada para representar uma rede em X *é análoga a utilizada em sequências:* $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{I}} \subset X$*.*

No estudo de sequências é necessário em algum momento definir o conceito de convergência desta para um ponto, isso não é diferente no caso das redes.

Definição 1.9. *Considere um espaço topológico* $(X, \mathfrak{T})$ *e* $x \in X$*. Então dizemos que uma rede* $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{I}}$ *em* X *converge para* x *se para qualquer* $\Omega \in \mathfrak{T}$ *tal que* $x \in \Omega$ *existir* $\alpha_0 \in \mathbf{I}$ *tal que*

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in \Omega \quad \forall \alpha \in \mathbf{I}$$

As notações para indicar a convergência também são herdadas das sequências: $x_\alpha \longrightarrow x$ *ou ainda* $\lim_{\alpha} x_\alpha = x$*.*

É fácil ver que na definição acima é suficiente trabalhar apenas com abertos de uma base local para o ponto x.

Uma pergunta natural que surge quando temos um conceito de convergência definido é se o limite associado é único ou não. Veremos na proposição abaixo que, a partir da definição dada, se o espaço topológico em questão for Hausdorff então temos a unicidade do limite.

Proposição 1.10. *Seja $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico Hausdorff. Então se o limite de uma rede em X existir ele será único.*

Demonstração: Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ uma rede em X convergente. Suponha por absurdo que seu limite não seja único, ou seja, existem $x,y\in X$ tais que $x\neq y$, $x_\alpha\longrightarrow x$ e $x_\alpha\longrightarrow y$.

Lembrando que se X é Hausdorff então dados dois pontos distintos de X existem abertos disjuntos contendo cada um desses pontos. Assim temos que existem $\Omega_1,\Omega_2\in\mathfrak{T}$ tais que, $x\in\Omega_1$, $y\in\Omega_2$ e $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$.

Então, pelas convergências acima, sabemos que existem $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{I}$ tais que

$$\alpha\geq\alpha_1\Rightarrow x_\alpha\in\Omega_1 \;\; e \;\; \alpha\geq\alpha_2\Rightarrow x_\alpha\in\Omega_2 \quad \forall\alpha\in\mathbf{I}.$$

Mas $\mathbf{I}$ é dirigido por hipótese, logo existe $\alpha_0\in\mathbf{I}$ tal que $\alpha_0\geq\alpha_1$ e $\alpha_0\geq\alpha_2$ o que, pelas conclusões acima, significa que $x_{\alpha_0}\in\Omega_1$ e $x_{\alpha_0}\in\Omega_2$.

Assim,

$$x_{\alpha_0}\in\Omega_1\cap\Omega_2\Rightarrow\Omega_1\cap\Omega_2\neq\emptyset,$$

absurdo pois Ω_1 e Ω_2 são disjuntos. Portanto o limite é único. $\square$

Redes e sequências possuem muitas aplicações análogas. O teorema abaixo é um exemplo, este mostra que a mesma caracterização de funções contínuas feita com sequências em espaços métricos pode ser feita em espaços topológicos arbitrários com redes.

Teorema 1.11. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X\longrightarrow Y$ uma função e $x\in X$. Então f é contínua em x se, e somente se*

$$x_\alpha\longrightarrow x\Rightarrow f(x_\alpha)\longrightarrow f(x),$$

para qualquer rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ em X.

Demonstração: Inicialmente suponha que f é contínua em x, e tome $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}} \subset X$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x$.

Considere Ω aberto em Y tal que $f(x) \in \Omega$, como f é contínua em x temos que existe U aberto em X tal que $x \in U$ e $f(U) \subset \Omega$.

Mas sabemos que $x_\alpha \longrightarrow x$, então existe $\alpha_0 \in \mathbf{I}$ tal que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in \mathbf{I}$.

E assim como $f(U) \subset \Omega$ temos

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U \Rightarrow f(x_\alpha) \in \Omega,$$

para qualquer $\alpha \in \mathbf{I}$. Logo $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

Para provar a outra implicação suponha que f não seja contínua em x. Então existe um aberto Ω_0 em Y tal que $f(x) \in \Omega_0$ e para qualquer aberto U de X que contém x temos $f(U) \not\subset \Omega_0$.

Considere então o conjunto

$$\Lambda_x = \{U : U \text{ é aberto em X e } x \in U\},$$

ordenado da seguinte forma

$$A \geq B \Leftrightarrow A \subset B,$$

para quaisquer A e B pertencentes a Λ_x. É fácil ver que a ordem acima é uma ordem parcial sobre Λ_x e ainda que nestas condições Λ_x é dirigido pois dados $A, B \in \Lambda_x$ temos $A \cap B \in \Lambda_x$ e

$$A \cap B \subset A \; e \; A \cap B \subset B \Rightarrow A \cap B \geq A \; e \; A \cap B \geq B.$$

Então, pelo Axioma da Escolha, para cada $A \in \Lambda_x$ podemos tomar $x_A \in A$ tal que $f(x_A) \notin \Omega_0$, já que $f(A) \not\subset \Omega_0$, e considerar uma rede $(x_A)_{A\in\Lambda_x}$ em X, note que $x_A \longrightarrow x$ pois dado Ω aberto em X com $x \in \Omega$ temos que $\Omega \in \Lambda_x$ e

$$A \geq \Omega \Leftrightarrow A \subset \Omega \Rightarrow x_A \in \Omega,$$

para qualquer $A \in \Lambda_x$. Vamos provar que $(f(x_A))_{A\in\Lambda_x}$ não converge para $f(x)$.

De fato temos $f(x) \in \Omega_0$ e para qualquer $A \in \Lambda_x$ temos $f(x_A) \notin \Omega_0$ pelo modo como a rede $(x_A)_{A\in\Lambda_x}$ foi escolhida. Portanto a rede $(f(x_A))_{A\in\Lambda_x}$ não é convergente para $f(x)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Outra caracterização que é possível ser feita com redes em espaços topológicos é a seguinte:

Teorema 1.12. *Seja X um espaço topológico e A um subconjunto não vazio deste. Então um ponto x pertence ao fecho de A se, e somente se, existe uma rede contida em A convergente para x.*

Demonstração: Inicialmente considere $x \in X$ e suponha que existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ contida em A e convergente para x. Tome então um aberto Ω que contém x, vamos mostrar que a intersecção deste aberto com A é não vazia. Como Ω contém x existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in \Omega,$$

para qualquer $\alpha \in I$.

Assim, em particular temos que $x_{\alpha_0} \in \Omega$ e $x_{\alpha_0} \in A$. Portanto $x_{\alpha_0} \in \Omega \cap A$, ou seja, $\Omega \cap A \neq \emptyset$ o que implica que $x \in \overline{A}$.

Por outro lado, suponha que $x \in \overline{A}$ e considere o conjunto Λ_x de todas as vizinhanças abertas de x. Vamos considerar a seguinte ordem parcial sobre Λ_x:

$$A \leq B \Leftrightarrow B \subset A,$$

para quaisquer A e B em Λ_x.

Veja agora que, por hipótese, para cada aberto Ω em Λ_x vale que $\Omega \cap A \neq \emptyset$. Então, pelo Axioma da Escolha, podemos tomar um ponto $x_\Omega \in \Omega \cap A$ para cada Ω em Λ_x. Por contrução fica claro que a rede $(x_\Omega)_{\Omega \in \Lambda_x}$ está contida em A, vamos mostrar que ela converge para x.

Seja U um aberto que contém x. Então U é um elemento de Λ_x e ainda para qualquer $V \in \Lambda_x$ tal que $V \geq U$ temos que $V \subset U$. Logo, como $x_V \in V$ claramente vale que $x_V \in U$. Como a escolha de U foi arbitrária temos que $x_\Omega \longrightarrow x$. $\square$

Capítulo 2

Topologias induzidas por famílias de funções

O foco deste trabalho está essencialmente no conceito de topologia fraca que, como será explicado posteriormente, é um tipo de topologia induzida por funções. Então vamos entender primeiramente como uma família de funções pode induzir uma topologia sobre um conjunto e analisar alguns exemplos para que em seguida possamos fazer as particularizações necessárias para o estudo da topologia fraca.

2.1 Topologia Sigma

Considere X um conjunto não vazio e uma família de funções $\mathcal{F}$ tal que cada elemento f de $\mathcal{F}$ possui X como domínio e um espaço topológico Y_f como contradomínio. Veja que dada uma topologia sobre X podemos nos perguntar quais elementos de $\mathcal{F}$ são contínuos nessa topologia. Podemos ainda nos perguntar se existe uma topologia que torna todos os elementos dessa família contínuos. A resposta será trivial pois basta considerar a topologia discreta sobre X, ou seja, definir todo subconjunto de X como aberto. Sabemos que a topologia discreta é a mais fina possível que podemos colocar sobre um conjunto, então concluímos que esta é a topologia mais fina que torna todo elemento de $\mathcal{F}$ contínuo. A partir disso é natural nos perguntarmos se existe uma topologia sobre X que seja a menos fina que torna todos os elementos de $\mathcal{F}$ contínuos.

De fato é possivel provar a existência de uma topologia assim. Nesta seção vamos primeiramente provar sua existência explicitando uma base para essa topologia.

Lema 2.1. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma família de funções onde cada função f em $\mathcal{F}$ possui X como domínio e um espaço topológico $(Y_f, \mathfrak{T}_f)$ como contradomínio. Então a seguinte coleção*

$$\beta = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A_i) : \ n \in \mathbb{N}, f_i \in \mathcal{F}, \, A_i \in \mathfrak{T}_{Y_{f_i}} \ \ i = 1, ..., n \Big\},$$

é base para uma topologia sobre X.

Demonstração: Vamos utilizar a Proposição 1.1 das preliminares para fazer a demonstração.

Primeiro note que dados $x \in X$ e $f \in \mathcal{F}$, vale que $x \in f^{-1}[Y_f] \in \beta$. Portanto vale (i) da proposição.

Note agora que (ii) é verdadeiro pois, dados $B_1, B_2 \in \beta$ sabemos que estes elementos são representados da seguinte forma

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n_1} f_i^{-1}(A_i) \ \ e \ \ B_2 = \bigcap_{i=1}^{n_2} g_i^{-1}(C_i).$$

Note que podemos enumerar os elementos de B_2 de uma forma diferente:

$$g_i = f_{n_1+i} \, ; \quad C_i = A_{n_1+i} \quad \forall i \in \{1, ..., n_2\},$$

de forma que

$$B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{n_1} f_i^{-1}(A_i) \right) \bigcap \left(\bigcap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f_i^{-1}(A_i) \right) = \bigcap_{i=1}^{n_1+n_2} f_i^{-1}(A_i),$$

ou seja, $B_1 \cap B_2 \in \beta$. Suponha então que $x \in B_1 \cap B_2$ e considere $B_0 = B_1 \cap B_2$, assim temos que $x \in B_0$ e $B_0 \subset B_1 \cap B_2$, o que prova (ii).

Assim,

$$\mathfrak{T}_\beta = \{ \cup \mathcal{A} : \ \ \mathcal{A} \subset \beta \}$$

é uma topologia sobre X e β é base para esta topologia. □

E agora o teorema a seguir mostra que a topologia gerada pela base β é a menor topologia que torna todos os elementos de $\mathcal{F}$ contínuos. E para cada família de funções fixada ela é única.

Teorema 2.2. *Considere um conjunto não vazio X e uma família de funções $\mathcal{F}$ onde cada elemento f desta possui X como domínio e um espaço topológico $(Y_f, \mathfrak{T}_f)$ como contradomínio. Então existe uma única topologia $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ sobre X que é a menor topologia (no sentido de inclusão) que torna todo elemento de $\mathcal{F}$ contínuo. Em outras palavras $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ é a única topologia sobre X que satisfaz:*

(i) Qualquer $f \in \mathcal{F}$ é $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$-contínuo.

(ii) Se $\mathfrak{T}$ é uma topologia sobre X que torna todo elemento de $\mathcal{F}$ contínuo então $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{T}$.

Demonstração: Considere o conjunto

$$\beta = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A_i) : \ n \in \mathbb{N}, f_i \in \mathcal{F}, \, A_i \in \mathfrak{T}_{Y_{f_i}} \ \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Pelo Lema 2.1 β é base para uma topologia sobre X. Seja $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ a topologia gerada por essa base.

Primeiro considere $f \in \mathcal{F}$ e um aberto Ω em Y_f. Como $\beta \subset \mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ fica claro que $f^{-1}[\Omega]$ é aberto, ou seja, f é $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$-contínua.

Suponha agora que $\mathfrak{T}$ é uma topologia sobre X que torna todo elemento de $\mathcal{F}$ contínuo. Então como β é composto por intersecções finitas de pré-imagens de abertos temos que $\beta \subset \mathfrak{T}$ e como topologias são fechadas por uniões quaisquer concluímos que $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{T}$.

A unicidade é trivial a partir do item (ii) do enunciado: suponha que $\mathfrak{T}$ é uma topologia sobre X diferente de $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$ e que satisfaz as condições do enunciado. Em particular, pelo item (ii) temos que $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$. Mas esta já satisfazia o mesmo item por hipótese, assim $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{T}$. Portanto $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$, um absurdo. Logo, vale a unicidade de $\mathfrak{T}_{\mathcal{F}}$. □

A topologia do Teorema 2.2 é dita topologia sigma (ou ainda topologia inicial) e denotada por $\sigma(X, \mathcal{F})$.

A seguir vamos ver dois exemplos de espaços topológicos e suas respectivas topologias sigma. Veremos que a topologia do subespaço e a topologia produto são topologias sigma associadas a uma determinada família de funções.

Exemplo 2.3 (Topologia do subespaço)**.** Considere um espaço topológico X e $A \subset X$ um subconjunto não vazio.

Seja $i : A \longrightarrow X$ tal que para cada elemento $a \in A$ temos $i(a) = a \in X$ (função inclusão). Considere a topologia do subespaço dada por,

$$\mathfrak{T}_A = \{\Omega \cap A : \ \Omega \text{ é aberto em } X\},$$

e veja que as seguintes condições valem:

(i) Seja Ω um aberto em X. Temos que

$$y \in i^{-1}[\Omega] \Leftrightarrow y \in A \; e \; y \in \Omega,$$

ou seja, $i^{-1}[\Omega] = \Omega \cap A \in \mathfrak{T}_A$. Portanto i é $\mathfrak{T}_A$-contínua.

(ii) Seja $\mathfrak{T}$ uma topologia sobre A que torna i contínua. Vamos mostrar que $\mathfrak{T}_A \subset \mathfrak{T}$.

Tome $\Omega \cap A$ em $\mathfrak{T}_A$. Como por hipótese i é $\mathfrak{T}$-contínua e Ω é aberto em X temos que $i^{-1}[\Omega]$ é um aberto de $\mathfrak{T}$. Mas pelo que foi dito no item anterior sabemos que $i^{-1}[\Omega] = \Omega \cap A$. Portanto $\Omega \cap A$ é um aberto de $\mathfrak{T}$ e assim $\mathfrak{T}_A \subset \mathfrak{T}$.

Logo, a topologia do subespaço é a menor topologia sobre A que torna i contínua, ou seja, $\mathfrak{T}_A = \sigma(A, \{i\})$.

Exemplo 2.4 (Topologia produto)**.** Considere J um conjunto não vazio, $\{(X_j, \mathfrak{T}_j) : \ j \in J\}$ uma família de espaços topológicos e ainda o produto

$$X = \prod_{j \in J} X_j.$$

É visto em cursos de Topologia que o conjunto

$$\beta = \Big\{ \prod_{j \in J} W_j : \ W_j \in \mathfrak{T}_j \ \ \forall j \in J \text{ e } \exists\, J^{'} \subset J \text{ finito t.q. } W_j = X_j \ \ \forall j \notin J^{'} \Big\},$$

é uma base para uma topologia sobre X dita Topologia Produto.

Agora, para cada $j \in J$, seja $\pi_j : \ X \longrightarrow X_j$ a projeção canônica de X em X_j. Note que, para cada elemento $\prod\limits_{j \in J} W_j$ em β, vale que

$$\prod_{j \in J} W_j = \bigcap_{j \in J'} \pi_j^{-1}[W_j],$$

onde $J^{'} \subset J$ é finito e $W_j = X_j$ para todo $j \notin J^{'}$. Ou seja, podemos reescrever β da seguinte forma:

$$\beta = \{ \bigcap_{j \in J'} \pi_j^{-1}[W_j] : \; J^{'} \subset J \text{ é finito }, \; W_j \in \mathfrak{T}_j \;\; \forall j \in J^{'} \}.$$

Repare que a igualdade acima nos mostra que β é base de abertos para a topologia $\sigma(X, \{\pi_j : \; j \in J\})$, ou seja, a topologia sigma sobre X com respeito à família de projeções $\{\pi_j : \; j \in J\}$ possui a mesma base que a Topologia Produto. Portanto, estas topologias coincidem.

2.2 Topologia induzida por funcionais

Daqui em diante vamos considerar X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com a respectiva topologia usual indicada por $\mathfrak{T}_{\mathbb{K}}$. O dual (algébrico) de X é dado por

$$X^{\#} = \{\phi : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ é linear}\}.$$

Considere então um subconjunto $X^{'}$ de $X^{\#}$.

Primeiramente, a partir da família de funcionais $X^{'}$ vamos considerar a topologia $\sigma(X, X^{'})$, ou seja, a topologia menos fina que torna todo elemento de $X^{'}$ contínuo. Veja que pelo Lema 2.1 o conjunto

$$\beta = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}(A_i) : \; n \in \mathbb{N}, \phi_i \in X^{'}, \, A_i \in \mathfrak{T}_{\mathbb{K}} \;\; i = 1, ..., n \right\}$$

é uma base para $\sigma(X, X^{'})$.

Veremos agora que uma construção parecida é utilizada para definir uma base local para $\sigma(X, X^{'})$.

Proposição 2.5. *Considere um ponto x de X. Então o conjunto*

$$\beta_x = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(x), \varepsilon)] : \; n \in \mathbb{N}, \; \varepsilon > 0, \; \phi_i \in X^{'} \;\; i = 1, ..., n \right\},$$

é uma base local para x na topologia $\sigma(X, X^{'})$.

Demonstração. Vamos mostrar que dado um aberto básico de $\sigma(X,X^{'})$ contendo x existe um elemento de β_x que contém x e está contido no aberto escolhido. Por simplificação vamos utilizar uma notação que será mantida no resto do trabalho, que é a seguinte:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(x),\varepsilon)] = W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon).$$

Considere U um aberto básico em $\sigma(X,X^{'})$ que contém x. Assim U é da forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}(A_i),$$

onde $\phi_1,...,\phi_n \in X^{'}$ e $A_1,...,A_n \in \mathfrak{T}_{\mathbb{K}}$.

Note que para $i=1,...,n$ temos que A_i é aberto em $\mathbb{K}$ e $\phi_i(x) \in A_i$ o que implica que existe $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$B(\phi_i(x),\varepsilon_i) \subset A_i,$$

assim vale a inclusão

$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(x),\varepsilon_i)] \subset U$$

e se nestas condições considerarmos $\varepsilon = \min\limits_{i=1,...,n} \varepsilon_i$ teremos

$$W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(x),\varepsilon_i)],$$

logo,

$$x \in W(x,\phi_1,...,\phi_n) \subset U,$$

como desejado. Portanto β_x é uma base local para $\sigma(X,X^{'})$. □

Uma propriedade interessante dos elementos dessa base segue do fato que dado $W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) \in \beta_x$ vale

$$W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(x),\varepsilon)] = \{y \in X : \ |\phi_i(y) - \phi_i(x)| < \varepsilon \ \ i=1,...,n\},$$

e assim dados $x,y \in X$ se fizermos a mudança de variável $z = y - x$, e lembrando que $\phi_1,...,\phi_n$ são funcionais lineares, teremos

$$|\phi_i(y) - \phi_i(x)| = |\phi_i(y-x)| = |\phi_i(z)| \quad i=1,...,n,$$

portanto,

$$\begin{aligned} W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) &= \{y\in X:\ |\phi_i(y)-\phi_i(x)|<\varepsilon\ \ i=1,...,n\} \\ &= \{x+z\in X:\ |\phi_i(z)|<\varepsilon\ \ i=1,...,n\} \\ &= x+W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon). \end{aligned}$$

Vemos então que qualquer aberto básico que contém x é uma translação de um aberto básico que contém a origem. Ou seja, na topologia $\sigma(X,X^{'})$, a base local para qualquer ponto do espaço é um transladado da base local para a origem.

Proposição 2.6. *Dada uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ em X, e $x\in X$ temos*

$$x_\alpha \longrightarrow x \text{ com respeito à } \sigma(X,X^{'}) \Leftrightarrow \phi(x_\alpha)\longrightarrow\phi(x)\ \ \forall\phi\in X^{'}$$

Demonstração: Note que é imediato, a partir do Teorema 1.11, que se $x_\alpha\longrightarrow x$ com respeito a $\sigma(X,X^{'})$ então

$$\phi(x_\alpha)\longrightarrow\phi(x)\ \ \forall\phi\in X^{'},$$

pois todo elemento de $X^{'}$ é $\sigma(X,X^{'})$-contínuo. Para provar a outra implicação, tome um aberto U de $\sigma(X,X^{'})$ contendo x.

Conhecemos uma base local β_x para x, o que implica que existe um conjunto $W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$ contido em U. Agora, por hipótese para $i=1,...,n$ temos $\phi_i(x_\alpha)\longrightarrow\phi_i(x)$ e assim existe $\alpha_i\in\mathbf{I}$ tal que

$$\alpha\geq\alpha_i\Rightarrow\phi_i(x_\alpha)\in B(\phi_i(x),\varepsilon),$$

ou equivalentemente,

$$\alpha\geq\alpha_i\Rightarrow x_\alpha\in\phi_i^{-1}\big[B(\phi_i(x),\varepsilon)\big],$$

para cada $\alpha\in\mathbf{I}$.

Como $\mathbf{I}$ é dirigido podemos tomar $\alpha_0\in\mathbf{I}$ com a propriedade

$$\alpha_0\geq\alpha_i\ \ \forall i\in\{1,...,n\},$$

e assim

$$\alpha\geq\alpha_0\Rightarrow x_\alpha\in\phi_i^{-1}\big[B(\phi_i(x),\varepsilon)\big]\quad\forall i\in\{1,...,n\},$$

e portanto

$$x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}\left[B(\phi_i(x),\varepsilon)\right] = W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon).$$

Como $W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) \subset U$ temos que para cada $\alpha \in \mathbf{I}$ vale

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U,$$

ou seja, $x_\alpha \longrightarrow x$. □

Vamos ver agora uma aplicação da proposição anterior, que ao mesmo tempo envolve a topologia produto citada anteriormente. No que será exposto será necessário saber o que significa dizer que a família $X^{'}$ separa pontos de X, segue então uma definição.

Definição 2.7. *Considere X um conjunto não vazio e uma família de funções $\mathcal{F}$ tal que cada um de seus elementos possui X como domínio. Dizemos que $\mathcal{F}$ separa pontos de X se dados dois pontos distintos x e y pertencentes a X existir um elemento $\phi \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$.*

E assim temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8. *Se $X^{'}$ separa pontos de X então o espaço $(X,\sigma(X,X^{'}))$ é homeomorfo a um subespaço do produto $Z = \prod_{\phi \in X'} \mathbb{K} = \mathbb{K}^{X^{'}}$.*

Demonstração: Queremos encontrar uma função $T : (X,\sigma(X,X^{'})) \longrightarrow Z$ que seja contínua, inversível sobre sua imagem e com inversa contínua.

Assim defina T de modo que para cada $x \in X$ temos $T(x) = (\phi(x))_{\phi \in X'} \in Z$. Inicialmente vamos provar que T é injetiva. Tome dois pontos distintos x e y em X. Como $X^{'}$ separa pontos de X temos que existe $\phi_0 \in X^{'}$ tal que $\phi_0(x) \neq \phi_0(y)$, e assim fica claro que

$$T(x) = (\phi(x))_{\phi \in X'} \neq (\phi(y))_{\phi \in X'} = T(y),$$

pois pelo menos na coordenada ϕ_0 estes pontos de Z possuem valores distintos. Então de fato T é injetiva.

Portanto para obtermos uma bijeção basta restringirmos o contradomínio considerando a função $T : (X,\sigma(X,X^{'})) \longrightarrow Im(T)$.

Agora para mostrar que T é um homeomorfismo vamos utilizar o Teorema 1.11, ou seja, vamos mostrar que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ em X converge para $x \in X$ se, e somente se $T(x_\alpha) \longrightarrow T(x)$. Pois com isso teremos que tanto T como T^{-1} são contínuas.

Dado $x \in X$ é possível ver que de fato isso acontece pelas implicações abaixo,

$$x_\alpha \longrightarrow x \overset{Prop.2.6}{\Longleftrightarrow} \phi(x_\alpha) \longrightarrow \phi(x),\ \ \forall \phi \in X' \overset{Prop.2.6}{\Longleftrightarrow} (\phi(x_\alpha))_{\phi\in X'} \longrightarrow (\phi(x))_{\phi\in X'}$$

Na primeira vez que utilizamos a proposição 2.6 consideramos a topologia sigma sobre X com relação à família X'. Já na segunda vez que utilizamos esta proposição consideramos a topologia sigma sobre Z com relação à família das projeções de Z em $\mathbb{K}$ (como vimos anteriormente esta é a topologia produto sobre Z). Note que o termo mais a direita diz exatamente que $T(x_\alpha) \longrightarrow T(x)$. □

Corolário 2.9. *Se X' separa pontos de X então a topologia $\sigma(X,X')$ satisfaz T_0, T_1, T_2, T_3 e $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demonstração: Vamos assumir conhecido o fato de que tanto subespaços quanto produtos de espaços topológicos T_i também são T_i para $i \in \{0,1,2,3,3\frac{1}{2}\}$.

Fixe $i \in \{0,1,2,3,3\frac{1}{2}\}$. Note que o corpo $\mathbb{K}$ é um espaço métrico, e portanto satisfaz o axioma T_i. Assim o produto $Z = \prod\limits_{\phi\in X'} \mathbb{K}$ também satisfaz T_i.

Pelo Teorema 2.8 o espaço $(X, \sigma(X,X')$ é homeomorfo a um subespaço de Z. Mas, como este subespaço de Z também satisfaz T_i e homeomorfismos preservam propriedades topológicas temos que $(X, \sigma(X,X'))$ satisfaz T_i, como desejado. □

Sabemos que a topologia $\sigma(X,X')$ torna todo elemento de X' contínuo e é a menor topologia que faz isso. Mas surge naturalmente a pergunta: será que não existe algum funcional linear fora de X' que também se torna $\sigma(X,X')$-contínuo? Veremos que no caso em que X' é um subespaço de $X^{\#}$ (e não apenas um subconjunto qualquer) a resposta será não. Para demonstrar esse fato, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.10. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $\phi, \phi_1, ..., \phi_n$ funcionais lineares sobre X. Então,*

$$\phi \in [\phi_i : i = 1,...,n] \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i) \subset \ker(\phi).$$

Demostração: Inicialmente se $\phi \in [\phi_i : i = 1, ..., n]$ então existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$. E assim se $y \in X$ é um elemento de $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i)$ então $\phi_i(y) = 0$ $i = 1, ..., n$. O que implica que

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(y) = 0,$$

ou seja, $y \in \ker(\phi)$. E assim, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i) \subset \ker(\phi)$.

A outra implicação será mostrada por indução sobre n.

Primeiramente vamos mostrar que a propriedade vale para $n = 1$. Suponha que ϕ, ϕ_1 são funcionais lineares sobre X que satisfazem

$$\ker(\phi_1) \subset \ker(\phi). \tag{2.1}$$

Se ϕ for um funcional nulo então trivialmente $\phi = 0 \cdot \phi_1$, então vamos supor que ϕ seja não nulo. Um resultado importante da álgebra linear que será útil neste ponto é que o núcleo de um funcional linear não nulo sobre um espaço vetorial é um subespaço próprio maximal deste, ou seja, ele é um subespaço que tem a propriedade de que qualquer subespaço que o contenha ou é igual a ele ou é o espaço todo. Então fica claro que ϕ_1 é um funcional não nulo pois caso contrário teríamos $\ker(\phi_1) = X$. E assim não valeria a inclusão em (2.1) pois $\ker(\phi)$ é subespaço próprio de X.

Portanto, seja V o núcleo de ϕ. Como ϕ_1 é não nulo temos que $\ker(\phi_1)$ é subespaço próprio maximal de X. Então como V é diferente de X e vale a inclusão em (2.1) temos que $\ker(\phi) = V = \ker(\phi_1)$.

E assim como V é próprio podemos tomar $x \in X \setminus V$ e definir a seguinte função

$$h = \phi - \frac{\phi(x)}{\phi_1(x)} \cdot \phi_1.$$

Note que nestas condições $h(x) = 0$ e $h(y) = 0$ para qualquer $y \in V$, o que significa que $[\{x\} \cup V] \subset \ker(h)$. Mas V é maximal e $x \in X \setminus V$, portanto $[\{x\} \cup V] = X$, ou seja, $\ker(h) = X$ o que implica que $h \equiv 0$. Consequentemente ϕ é combinação linear de ϕ_1 e $\phi = \frac{\phi(x)}{\phi_1(x)} \cdot \phi_1$.

Suponha agora que a propriedade vale para $n \in \mathbb{N}$, vamos provar que ela vale para $n + 1$.

Sejam $\phi_1,...,\phi_{n+1}$ funcionais lineares satisfazendo

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} \ker(\phi_i) \subset \ker(\phi).$$

Seja $W = \ker(\phi_{n+1})$ e considere os seguintes funcionais:

$$g = \phi|_W, g_1 = \phi_1|_W, ..., g_n = \phi_n|_W,$$

e seja $y \in W$ tal que

$$y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i).$$

Lembrando que vale a inclusão

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i),$$

temos que y está na intersecção dos núcleos de $\phi_1,...,\phi_{n+1}$. Então por hipótese y é um elemento do núcleo de ϕ e consequentemente temos que $y \in \ker(g)$.

Em suma,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i) \subset \ker(g).$$

Logo, pela hipótese de indução teremos que g é combinação linear dos funcionais $g_1,...,g_n$ em W, ou seja, existem $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(y), \tag{2.2}$$

para todo $y \in W$.

Se considerarmos o funcional $h = g - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ definido em W, teremos

$$\ker(h) \subset \ker(\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i).$$

Por (2.2) temos $\ker(h) = W$ então

$$\ker(\phi_{n+1}) \subset \ker(\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i).$$

Então, como a propriedade vale no caso $n=1$, o funcional $\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$ é combinação linear de ϕ_{n+1} , ou seja, existe $\alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\phi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i = \alpha_{n+1} \cdot \phi_{n+1},$$

ou equivalentemente,

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i \Rightarrow \phi \in [\phi_i : i = 1, ..., n+1].$$

Pelas considerações acima e pelo Princípio da indução finita, segue o resultado. $\square$

Dada uma topologia $\mathfrak{T}$ sobre X, o conjunto de todos os funcionais de $X^{\#}$ que são $\mathfrak{T}$-contínuos será representado por $(X, \mathfrak{T})^*$.

Teorema 2.11. *Considere $\phi \in X^{\#}$ e suponha que $X^{'}$ é subespaço de $X^{\#}$. Então ϕ é $\sigma(X, X^{'})$-contínuo se, e somente se, ϕ pertence a $X^{'}$. Em outras palavras, vale que*

$$(X, \sigma(X, X^{'}))^* = X^{'}.$$

Demonstração: Uma das implicações é trivial, pois se temos um funcional $\phi \in X^{'}$ é claro que ele é $\sigma(X, X^{'})$-contínuo pois esta topologia foi definida de modo a tornar todo elemento de $X^{'}$ contínuo. Portanto $X^{'} \subset (X, \sigma(X, X^{'}))^*$.

Tome agora um elemento $\phi \in (X, \sigma(X, X^{'}))^*$. Queremos mostrar que $\phi \in X^{'}$.

Como ϕ é $\sigma(X, X^{'})$-contínuo e as bolas abertas são conjuntos abertos no corpo $\mathbb{K}$ temos que, em particular

$$V = \phi^{-1}[B(0,1)] \in \sigma(X, X^{'}),$$

e como ϕ é linear é fácil ver que $0 \in V$. Seja então β_0 a base local para 0 como definimos anteriormente. Isso significa que existe um aberto básico $W(0, \phi_1, ..., \phi_n, \varepsilon)$ em β_0 tal que

$$0 \in W(0, \phi_1, ..., \phi_n, \varepsilon) \subset V.$$

Note agora que o fato de os funcionais $\phi_1, ..., \phi_n$ serem lineares implica que

$$\phi_i(0) = 0 \in B(0, \varepsilon) \quad i = 1, ..., n,$$

e assim, lembrando que

$$W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(\phi_i(0),\varepsilon)] = \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}[B(0,\varepsilon)],$$

temos,

$$y \in \ker(\phi_i) \quad \forall i \in \{1,...,n\} \Rightarrow y \in W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon),$$

ou equivalentemente,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i) \subset W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon).$$

Seja $y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i)$. Então pela linearidade dos funcionais $\phi_1,...,\phi_n$ vale que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$my \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i),$$

e assim pelas inclusões acima temos que $my \in V = \phi^{-1}[B(0,1)]$, ou seja,

$$m|\phi(y)| = |\phi(my)| \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

o que só pode acontecer se y for um elemento de $\ker(\phi)$. Portanto temos que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i) \subset \ker(\phi)$.

Então pelo Lema 2.10 temos $\phi \in [\phi_i : i = 1,...,n] \subset X^{'}$, o que implica que $(X,\sigma(X,X^{'}))^* \subset X^{'}$.

E assim

$$(X,\sigma(X,X^{'}))^* = X^{'}.$$

□

Ao estudar uma topologia sobre um espaço vetorial é interessante que as operações básicas deste espaço (soma e multiplicação por escalar) sejam funções contínuas. O teorema a seguir nos mostra que, na topologia sigma, essa propriedade é verdadeira.

Teorema 2.12. *Seja $W = (X,\sigma(X,X^{'}))$. E considere as funções $s : W \times W \longrightarrow W$ e $m : \mathbb{K} \times W \longrightarrow W$ tais que*

$$s(x,y) = x + y \quad e \quad m(\lambda,x) = \lambda x,$$

para qualquer $(x,y) \in W \times W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então s e m são funções contínuas.

Demonstração: Vamos utilizar a caracterização do Teorema 1.11 para fazer a demonstração.

Inicialmente vamos mostrar que m é contínua. Considere $(\lambda_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em $\mathbb{K}\times W$ convergente para um ponto (λ, x) deste produto com respeito à topologia produto. Sabemos que esta topologia é uma topologia sigma com respeito à família das projeções canônicas definidas em $\mathbb{K}\times W$. Então, como as projeções são contínuas, vale que

$$\lambda_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{T}_{\mathbb{K}}} \lambda, \tag{2.3}$$

e também que

$$x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X,X')} x. \tag{2.4}$$

Vamos mostrar que $m(\lambda_\alpha, x_\alpha) \xrightarrow{\sigma(X,X')} m(\lambda, x)$. Para isso, note que dado $\phi \in X'$ temos, pela convergência em (2.4) acima, que $\phi(x_\alpha) \longrightarrow \phi(x)$ em $\mathbb{K}$. E, este fato mais a convergência em (2.3) acima implicam que

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \phi(m(\lambda_\alpha, x_\alpha)) &= \lim_\alpha \phi(\lambda_\alpha x_\alpha) \\
&= \lim_\alpha (\lambda_\alpha \cdot \phi(x_\alpha)) \\
&\overset{*}{=} \lim_\alpha \lambda_\alpha \cdot \lim_\alpha \phi(x_\alpha) \\
&= \lambda \cdot \phi(x) = \phi(\lambda x) \\
&= \phi(m(\lambda, x)),
\end{aligned}$$

onde a igualdade indicada por $(*)$ é válida pois o produto é contínuo em $\mathbb{K}$. Portanto, m é contínua.

Agora vamos considerar uma rede $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in I}$ em $W\times W$ e supor que esta converge para um ponto (x, y) deste mesmo espaço. Vamos mostrar que

$$s(x_\alpha, y_\alpha) \xrightarrow{\sigma(X,X')} s(x, y).$$

Novamente, como a topologia produto é uma topologia sigma sobre $W\times W$, a continuidade das projeções implica que

$$x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X,X')} x,$$

e também que

$$y_\alpha \xrightarrow{\sigma(X,X')} y.$$

Note que, dado ϕ em X', as convergências acima implicam que $\phi(x_\alpha) \longrightarrow \phi(x)$ e $\phi(y_\alpha) \longrightarrow \phi(y)$ em $\mathbb{K}$. Assim valem as igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \phi(s(x_\alpha, y_\alpha)) &= \lim_\alpha \phi(x_\alpha + y_\alpha) \\
&= \lim_\alpha (\phi(x_\alpha) + \phi(y_\alpha)) \\
&\overset{**}{=} \lim_\alpha \phi(x_\alpha) + \lim_\alpha \phi(y_\alpha) \\
&= \phi(x) + \phi(y) = \phi(x+y) \\
&= \phi(s(x,y)),
\end{aligned}$$

onde a igualdade em $(**)$ é verdadeira pois a soma é contínua em $\mathbb{K}$. Logo, s também é contínua. □

Um espaço vetorial munido de uma topologia que torna suas operações básicas (soma e multiplicação por escalar) contínuas é dito um espaço vetorial topológico (ou **EVT**). Portanto, o resultado acima nos mostra que X munido da topologia $\sigma(X,X')$ é um **EVT**.

A seguir, provamos um corolário do Teorema 2.12 que utilizaremos no próximo capítulo:

Corolário 2.13. *Considere $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{K}$ e v um elemento de X. Então a função $T : (X, \sigma(X,X')) \longrightarrow (X, \sigma(X,X'))$ tal que*

$$T(x) = \lambda x + v \qquad \forall x \in X,$$

é um homeomorfismo.

Demonstração: Note que T é uma composta da soma com a multiplicação por escalar de X. Como, pelo teorema anterior, estas funções são $\sigma(X,X')$-contínuas temos que T é $\sigma(X,X')$-contínua.

Agora, como $\lambda \neq 0$, a inversa de T é dada por $T^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda}(y - v)$ para qualquer y em X. Mas veja que para cada $y \in X$, se considerarmos $z = -\frac{1}{\lambda}v$ então vale que $T^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda}y - \frac{1}{\lambda}v = \frac{1}{\lambda}y + z$. Que, pelo teorema anterior, também é uma composta de funções $\sigma(X,X')$-contínuas, logo, T^{-1} é $\sigma(X,X')$-contínua. Portanto, T é um homeomorfismo. □

Uma propriedade interessante da topologia $\sigma(X,X^{'})$ que a difere da topologia da norma é a seguinte:

Proposição 2.14. *Suponha que $X^{'}$ seja um subespaço de dimensão infinita de $X^{\#}$. Então os abertos da topologia $\sigma(X,X^{'})$ são ilimitados (em norma).*

Demonstração: Seja W um aberto não vazio de $\sigma(X,X^{'})$. Suponha inicialmente que W contém a origem. Conhecemos uma base local para a topologia sigma, então existe um aberto básico da forma $W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$ contido em W.

Note ainda que qualquer elemento que estiver no kernel de todos os funcionais $\phi_1,...,\phi_n$ necessariamente pertence a $W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$. Então valem as inclusões:

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker(\phi_i) \subset W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) \subset W. \tag{2.5}$$

Como $X^{'}$ possui dimensão infinita é possível tomar $\phi \in X^{'}$ que não seja gerado por $\{\phi_1,...,\phi_n\}$. E assim pelo Lema 2.10 temos

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker(\phi_i) \not\subset \ker(\phi),$$

o que significa que existe um elemento não nulo pertencente à $\bigcap_{i=1}^{n}\ker(\phi_i)\setminus\ker(\phi)$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n}\ker(\phi_i)$ é um subespaço não nulo de X. E por isto ilimitado (em norma). Concluímos então a partir das inclusões em (2.5) que W é ilimitado.

Suponha agora que o aberto W não contenha a origem. Dado um elemento x de W, podemos encontrar um aberto básico $W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$ contido em W. Mas, sabemos que

$$W(x,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon) = x + W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon).$$

E como já sabemos que $W(0,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$ é ilimitado, segue que W é ilimitado. $\square$

Capítulo 3

Topologias fraca e fraca estrela

3.1 Topologia fraca

Até agora trabalhamos com um subconjunto qualquer do dual algébrico de X. Vamos agora tomar um subconjunto específico de $X^{\#}$ para definir o conceito de topologia fraca, assunto central nesse trabalho. E para isso será necessário considerar uma norma sobre X. Segue então uma definição:

Definição 3.1. *Considere um espaço vetorial normado X e o conjunto X^* (dito o dual de X) de todos os funcionais lineares e contínuos na topologia gerada pela norma de X. Então a topologia $\sigma(X,X^*)$ é dita topologia fraca sobre X.*

Note que na definição acima claramente X^* é um subespaço de $X^{\#}$ pois os funcionais lineares e contínuos na norma não perdem essa propriedade quando somados ou multiplicados por escalares. Então o Teorema 2.11 nos diz que, em particular, vale

$$(X,\sigma(X,X^*))^* = X^*.$$

Ou seja, um funcional é contínuo na norma se, e só se, ele for contínuo na topologia fraca.

Note que a topologia fraca está contida em qualquer topologia sobre X que torne todo elemento da família X^* contínuo. Em particular a topologia fraca está contida na topologia gerada pela norma de X.

A partir da Proposição 2.6 uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ em X converge na topologia fraca para um ponto $x \in X$ se, e só se, para qualquer $\phi \in X^*$ temos que $\phi(x_\alpha) \longrightarrow \phi(x)$.

Daqui em diante se uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ em X converge com relação à topologia fraca para um ponto $x \in X$ diremos que esta converge fracamente para x e utilizaremos a seguinte notação:

$$x_\alpha \xrightarrow{w} x.$$

Ainda, se um conjunto for aberto na topologia fraca diremos que este é w-aberto. E o mesmo irá valer para outras propriedades topológicas, ou seja, um conjunto fracamente fechado será dito w-fechado, uma função contínua com respeito à topologia fraca será dita w-contínua e assim por diante.

Vejamos um exemplo em que a topologia fraca está propriamente contida na topologia da norma.

Exemplo 3.2. Considere o espaço l_2 de todas as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que a soma $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2$ é finita. Este é um espaço vetorial normado com a seguinte norma:

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2},$$

para toda sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em l_2.

Sabemos que este espaço possui uma correspondência com seu dual l_2^*. Então, considere um funcional $\phi \in l_2^*$ e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o elemento de l_2 associado a ϕ. Veja que para cada elemento e_n da base canônica em l_2 vale que

$$\phi(e_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k \cdot x_k = x_n.$$

Mas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertence a l_2. Então é uma sequência convergente para zero. Portanto $\phi(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para zero. E como a escolha de ϕ foi arbitrária temos pela Proposição 2.6 que a sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para zero.

Porém, dados dois elementos distintos e_n e e_m da base canônica temos que $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$. Então se essa sequência fosse convergente em norma, ela também seria de cauchy e a distância entre elementos distintos desta deveria ficar menor do que $\sqrt{2}$ em algum momento. Assim a sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é convergente em norma. De fato, em geral a topologia fraca é uma subtopologia própria da topologia da norma.

O teorema abaixo nos mostra que a situação acima acontece de modo geral em espaços de dimensão infinita. Veremos que a topologia fraca coincide com a topologia da norma apenas quando trabalhamos em dimensão finita.

Teorema 3.3. *A topologia fraca é igual à topologia da norma de X se, e só se, X tem dimensão finita.*

Demonstração: Inicialmente suponha que as topologias sejam iguais. Então a bola aberta unitária é aberta tanto na topologia da norma como na topologia fraca. Assim este conjunto é um aberto limitado em norma.. Logo, pela Proposição 2.14 o dual de X tem dimensão finita e assim X também tem dimensão finita.

Suponha agora que a dimensão de X seja finita e seja $\{e_1,...,e_n\}$ uma base normalizada para X. Considere um ponto x pertencente a X e uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ neste espaço tal que $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. Se $\{e_1^*,...,e_n^*\}$ é a base dual de $\{e_1,...,e_n\}$ então vale que

$$z = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(z)e_i \quad \forall z \in X.$$

Logo, como $x_\alpha \xrightarrow{w} x$, a Proposição 2.6 implica que

$$e_i^*(x_\alpha) \longrightarrow e_i^*(x) \qquad i = 1,...,n,$$

pois X tem dimensão finita e, portanto, e_i^* é contínuo para $i = 1,...,n$. Então seja $\varepsilon > 0$ e $\alpha_0 \in I$ tais que

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |e_i^*(x_\alpha) - e_i^*(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad i = 1,...,n.$$

Assim para $\alpha \geq \alpha_0$ vale que

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(e_i^*(x_\alpha) - e_i^*(x))e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|e_i^*(x_\alpha) - e_i^*(x)|\|e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n}|e_i^*(x_\alpha) - e_i^*(x)| \\ &< n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a rede $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para x na topologia da norma. Logo, a função identidade entre os espaços $(X,\sigma(X,X^*))$ e $(X,\mathfrak{T}_{\|\cdot\|})$ é contínua, o que implica que $\mathfrak{T}_{\|\cdot\|} \subset \sigma(X, X^*)$. Portanto, $\mathfrak{T}_{\|\cdot\|} = \sigma(X, X^*)$, já que a outra inclusão é sempre verdadeira. $\square$

Lembramos o resultado abaixo, conhecido como Hahn-Banach Geométrico.

Teorema 3.4. *Considere C um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X. Se $x_0 \notin C$ então existe f em X^* tal que*

$$Re(f(x_0)) > \sup\{Re(f(x)) \; : \; x \in C\}.$$

Teorema 3.5 (Mazur)**.** *Todo subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X é w-fechado.*

Demonstração. Se $C = X$, claro que C é w-fechado pela definição de topologia. Suponha que C seja um subconjunto próprio de X fechado e convexo. Tomamos $x_0 \notin C$ arbitrário. Pelo teorema anterior, existe $f \in X^*$ tal que

$$\mathrm{Re}(f(x_0)) > \sup\{\mathrm{Re}(f(x)) \; : \; x \in C\}.$$

Tome um número real α tal que

$$\sup\{\mathrm{Re}(f(x)) \; : \; x \in C\} < \alpha < \mathrm{Re}(f(x_0)).$$

Sabemos que $\mathrm{Re} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, portanto, temos que o conjunto $V = \mathrm{Re}^{-1}[(\alpha, \infty)]$ é aberto em $\mathbb{K}$. E assim, como f é w-contínua, o conjunto $\Omega = f^{-1}[V]$ é w-aberto em X. Em suma, temos que

$$x_0 \in \Omega \subset X \setminus C,$$

ou seja, $X \setminus C$ é w-aberto, pela arbitrariedade de x_0. Logo, C é w-fechado. $\square$

É fácil ver que toda bola em um espaço de Banach é um conjunto convexo. Assim, vale o seguinte corolário:

Corolário 3.6. *Toda bola fechada em um espaço de Banach X é w-fechada.*

3.2 Topologia fraca estrela

Considere uma espaço vetorial normado X. Vimos que a topologia fraca é a topologia sigma sobre X que é gerada pelos funcionais do dual de X, denotado por X^*. Nesta seção, o objetivo é definir e estudar uma topologia sigma sobre X^*. Note que usualmente este espaço é munido da norma:

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in B_X\} \qquad \forall \phi \in X^*,$$

portanto, podemos considerar o dual de X^*, ou seja, a família $(X^*)^*$ de todos os funcionais definidos em X^* que são lineares e contínuos com respeito à topologia gerada pela norma de operadores acima. Denotaremos esse dual por X^{**} e ainda diremos que este é o bidual de X. A família de funcionais que vamos utilizar para gerar uma topologia sobre X^* será um subespaço de X^{**}.

Sabemos que X pode ser imerso isometricamente dentro de seu bidual através da imersão canônica $i : X \longrightarrow X^{**}$ que associa cada x em X a um funcional de X^{**} da forma:

$$(i(x))(\phi) = \phi(x) \qquad \forall \phi \in X^*.$$

Note que a família de funcionais dada pela imagem $i[X]$ dessa aplicação é um subespaço de X^{**}, por ser a imagem de um operador linear. Veja, a topologia fraca foi definida de forma a tornar todo elemento do dual de X contínuo, porém nesta seção definiremos uma topologia sigma com respeito à família de funcionais dada pela imagem de i, esta será dita topologia fraca estrela.

Note que se considerarmos a topologia fraca sobre X^* então temos que todo elemento de X^{**} é contínuo. Então, se i for sobrejetora as topologias fraca e fraca estrela tornam os mesmos funcionais contínuos. E assim, é razoável nos perguntarmos se essas duas topologias são iguais neste caso. Vale lembrar aqui que quando i é sobrejetora o espaço X é dito reflexivo. Assim, respondendo ao questionamento sobre a igualdade das topologias, veremos ainda nesta seção que essas topologia coincidem se, e só se, X for reflexivo.

Primeiramente, vamos definir formalmente a topologia que trataremos nesta seção:

Definição 3.7. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Considere X^{**} (dito o bidual de X) o espaço de todos os funcionais lineares sobre X^* que são* *contínuos com respeito a topologia gerada pela norma de operadores*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in B_X\} \qquad \phi \in X^*.$$

Considere a imersão canônica i. Então a topologia $\sigma(X^*, i[X])$ sobre X^* é dita topologia fraca estrela.

Daqui em diante, assim como o símbolo w foi utilizado para denotar propriedades satisfeitas com relação à topologia fraca vamos utilizar o símbolo w^* para indicar propriedades satisfeitas com relação à topologia fraca estrela.

Veja que a imersão canônica de X em seu bidual nos permite representar cada funcional de $i[X]$ por um elemento de X. A partir disso, é usual (e razoável) denotar a topologia fraca estrela por $\sigma(X^*, X)$. E ainda, sabemos por resultados anteriores que se vale a convergência $\phi_\alpha \xrightarrow{w^*} \phi$ em X^* então para todo funcional Ψ em $i[X]$ temos que $\Psi(\phi_\alpha) \longrightarrow \Psi(\phi)$. Por outro lado, como já dissemos, este funcional Ψ pode ser representado por um elemento x em X de forma que vale

$$\Psi(\phi_\alpha) = \phi_\alpha(x) \qquad \forall \alpha \in I,$$

portanto, usualmente escrevemos a convergência $\Psi(\phi_\alpha) \longrightarrow \Psi(\phi)$ da seguinte forma: $\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi(x)$.

Agora, veja que $i[X]$ é um subespaço do dual algébrico de X^*. Então podemos concluir a partir do Teorema 2.11 que vale a igualdade

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = i[X],$$

ou seja, um funcional é w^*-contínuo se, e só se, ele pertence a família $i[X]$. E note ainda que todo funcional em $i[X]$ é w-contínuo também, pois $i[X]$ está contido no bidual de X e a topologia fraca sobre X^* torna todo elemento de X^{**} w-contínuo.

Ou seja, as topologia fraca e fraca estrela tornam todo elemento de $i[X]$ contínuo. Porém, por definição, a topologia fraca estrela é a menor topologia (no sentido de inclusão) que faz isso. Logo, vale a inclusão

$$\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}),$$

o que significa que a topologia fraca estrela está contida na fraca. Veremos agora que tal inclusão em geral é própria:

Exemplo 3.8. Considere o espaço c_0 de todas as sequências em $\mathbb{K}$ que convergem para zero com respeito à $\mathfrak{T}_{\mathbb{K}}$. Se considerarmos a norma do supremo sobre c_0, sabemos que o dual deste espaço é identificado com o espaço l_1 formado pelas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que a soma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ é finita.

Considere a base de Schauder canônica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em l_1, e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja e_k^* o elemento em c_0^* associado a e_k. Então, para cada $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ temos que a igualdade $e_k^*(y) = y_k$ faz valer as seguintes implicações

$$\begin{aligned} y_k \longrightarrow 0,\ \forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e_k^*(y) \longrightarrow e_k^*(0),\ \forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad e_k^* \xrightarrow{w^*} 0, \end{aligned}$$

ou seja, $(e_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ é w^*-convergente para zero.

Mas, apesar disso, esta sequência não é w-convergente para zero. Caso contrário, para cada ϕ em $c_0^{**} = l_\infty$ deveríamos ter que

$$\phi(e_k^*) \longrightarrow \phi(0).$$

Em particular, se considerarmos a sequência $(1,1,1,1,...)$ em l_∞ e denotarmos por z^* o elemento de c_0^{**} associado a esta sequência então deveríamos ter que $z^*(e_k^*) \longrightarrow z^*(0) = 0$. Absurdo, pois $z^*(e_k^*) = 1$ para todo k em $\mathbb{N}$.

Naturalmente, é razoável pensar nas condições para que a topologia fraca estrela seja igual a topologia fraca. O teorema a seguir mostra que se X for reflexivo temos a igualdade.

Teorema 3.9. *Seja X espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Então a topologia fraca é igual à topologia fraca estrela em X^* se, e só se, X for reflexivo.*

Demonstração: Inicialmente suponha que X seja reflexivo. Então a imersão canônica i é sobrejetora, ou seja, $i[X] = X^{**}$. Assim, trivialmente vale

$$\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, i[X]).$$

Agora, suponha que a topologia fraca e a fraca estrela sejam iguais. Então elas devem tornar os mesmos funcionais contínuos. Sabemos pelo Teorema 2.11 que o dual do espaço (X^*, X^{**}) é a família X^{**}. E ainda que o dual do espaço $(X^*, i[X])$ é a família $i[X]$. Pelo que foi dito antes, estes duais devem coincidir. Então temos que $i[X] = X^{**}$. Ou seja, i é sobrejetora. Portanto, X é reflexivo. $\square$

O resultado a seguir é consequência do Teorema de Tychonoff, e é um teorema importante da Análise Funcional.

Teorema 3.10 (Alaoglu)**.** *Seja X um espaço vetorial normado. Então o conjunto B_{X^*} é w^*-compacto.*

Demonstração: Considere um espaço vetorial normado X sobre o corpo $\mathbb{K}$. É trivial ver que a família $i[X]$ separa pontos de X^* pois, dados dois pontos distintos ϕ_1 e ϕ_2 em X^* temos que existe x em X tal que $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$, ou seja, $(i(x))(\phi_1) \neq (i(x))(\phi_2)$. Então, pelo Teorema 2.8, considere o homeomorfismo T entre X^* e sua imagem que está contida no produto $Z = \prod\limits_{x \in X} \mathbb{K}$.

Sabemos que para cada $\phi \in X^*$ o homeomorfismo T associa um elemento de Z da forma $(\phi(x))_{x \in X}$. Considere ϕ em B_{X^*}, então $|\phi(x)| \leq \|x\|$ para qualquer $x \in X$, ou seja,

$$T[B_{X^*}] \subset \prod_{x \in X} B[0, \|x\|], \tag{3.1}$$

onde para cada $x \in X$ o conjunto $B[0, \|x\|]$ é a bola fechada de raio $\|x\|$ e centrada na origem em $\mathbb{K}$.

Denote por K o produto de bolas fechadas na inclusão (3.1) acima. Como sabemos que as bolas fechadas são compactas em $\mathbb{K}$ temos pelo Teorema de Tychonoff que o produto K é compacto. Assim basta mostrar que $T[B_{X^*}]$ é fechado neste produto. Considere então um elemento $(a_x)_{x \in X}$ em $\overline{T[B_{X^*}]} \subset K$. Então existe uma rede $(\phi_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_{X^*}$ tal que $T(\phi_\alpha) \longrightarrow (a_x)_{x \in X}$. E lembrando que estamos considerando a topologia produto sobre K, vale que $\phi_\alpha(x) \longrightarrow a_x$ para todo $x \in X$. Defina $\psi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\psi(x) = a_x$ para cada $x \in X$. Vamos mostrar que $\psi \in B_{X^*}$.

Primeiramente, ψ é linear pois dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos, pela continuidade das operações em $\mathbb{K}$, que

$$\begin{aligned}
\psi(x+\lambda y) &= a_{x+\lambda y} \\
&= \lim_{\alpha} \phi_\alpha(x+\lambda y) \\
&= \lim_{\alpha} (\phi_\alpha(x) + \lambda \phi_\alpha(y)) \\
&= \lim_{\alpha} \phi_\alpha(x) + \lambda \lim_{\alpha} \phi_\alpha(y) \\
&= a_x + \lambda a_y \\
&= \psi(x) + \lambda \psi(y).
\end{aligned}$$

Note agora que para cada $x \in X$ sabemos que $\phi_\alpha(x) \in B[0, \|x\|]$ para qualquer $\alpha \in I$, e como bolas fechadas são conjuntos fechados em $\mathbb{K}$ temos que o limite de $(\phi_\alpha(x))_{\alpha \in I}$ é um elemento de $B[0, \|x\|]$. Portanto, vale que

$$|\psi(x)| = |a_x| \leq \|x\| \quad \forall x \in X, \tag{3.2}$$

e veja que essa desigualdade implica que ψ é contínua e que $\|\psi\| \leq 1$, ou seja, $\psi \in B_{X^*}$.

Logo, como $T(\psi) = (\psi(x))_{x \in X} = (a_x)_{x \in X}$ temos que $(a_x)_{x \in X} \in T[B_{X^*}]$. Portanto, $T[B_{X^*}]$ é fechado em K. □

A seguir, um resultado que segue do fato de B_{X^*} ser w^*-fechado (já que este conjunto é w^*-compacto pelo teorema anterior e a topologia fraca estrela é Hausdorff pelo Corolário 2.9). Tal resultado será útil para analisar a categoria de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ no próximo capítulo.

Proposição 3.11. *Toda bola fechada em X^* é w^*-fechada.*

Demonstração: Sejam v^* em X^* e $r > 0$. Considere $B[v^*, r]$ a bola fechada em X^* de centro v^* e raio r e note que

$$B[v^*, r] = v^* + rB_{X^*}.$$

Veja que a função $T : (X^*, \sigma(X^*, X)) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$ tal que $T(x^*) = v^* + rx^*$, para todo x^* em X^*, é um homeomorfismo pelo Corolário 2.13. Então, como

$$\begin{aligned} B[v^*, r] &= v^* + rB_{X^*} \\ &= \{v^* + rx^* : x^* \in B_{X^*}\} \\ &= T[B_{X^*}], \end{aligned}$$

e homeomorfismos preservam fechados, temos que $B[v^*, r]$ é w^*-fechado. □

Capítulo 4

Sigma vs Norma

Neste capítulo veremos alguns exemplos que mostram como resultados conhecidos de espaços normados munidos da topologia da norma podem deixar de ser verdade quando consideramos as topologias fraca ou fraca estrela.

Exibiremos um conjunto que possui a origem como ponto de acumulação mas tal que nenhuma sequência contida neste conjunto é convergente para zero. Apesar disso, exibiremos uma rede contida no mesmo conjunto e que converge fracamente para zero, conforme o Teorema 1.12.

Veremos também que apesar da bola fechada unitária do dual de um espaço normado ser w^*-compacta (Teorema de Alaoglu), não é verdade que toda sequência contida neste conjunto admite subsequência convergente. Ou seja, na topologia fraca estrela as noções de compacto e sequencialmente compacto não são equivalentes, ao contrário do que acontece em espaços métricos.

Sabemos que qualquer espaço métrico completo não vazio é de segunda categoria (Teorema de Categorias de Baire). Veremos, no entanto, que um espaço de Banach munido da topologia fraca e o seu dual munido da topologia fraca estrela são ambos espaços de primeira categoria.

Por fim, exibiremos uma função que não é contínua mas é sequencialmente contínua. Para isso definiremos o que é um espaço de Schur e provaremos que l_1 é um espaço deste tipo. Em seguida mostraremos que a identidade entre $(l_1, \sigma(l_1, l_1^*))$ e $(l_1, \mathfrak{T}_{\|\cdot\|_1})$ é a função desejada. Ou seja, a caracterização de funções contínuas por sequências não é valida em espaços topológicos em geral.

4.1 Ponto de acumulação

No que se segue o espaço normado em questão será um espaço de hilbert $\mathcal{H}$ separável sobre $\mathbb{K}$. Sabemos que, nestas condições, $\mathcal{H}$ possui um subconjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que é ortonormal, completo e tal que para cada elemento $h \in \mathcal{H}$ existe uma única sequência de coeficientes $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ satisfazendo

$$h = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n,$$

onde a convergência da série é com relação à norma que provém do produto interno de $\mathcal{H}$. E ainda, como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é maximal, podemos escrever a norma de $\mathcal{H}$ da seguinte forma:

$$\|h\| = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \alpha_n, e_n \rangle|^2}.$$

Ao estudar a topologia fraca de $\mathcal{H}$ faremos como anteriormente e nos focaremos em utilizar uma base local para esta topologia. Dados um ponto h em $\mathcal{H}$, um número real ε positivo e $\phi_1,...,\phi_n$ funcionais em $\mathcal{H}^*$, denotamos um aberto básico por $W(h,\phi_1,...,.\phi_n,\varepsilon)$. Mas veja que pelo Lema de Representação de Riesz para cada $i \in \{1,...,n\}$ o funcional ϕ_i possui um único elemento h_i em $\mathcal{H}$ associado, de forma que

$$\phi_i(x) = \langle x, h_i \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

então, por simplificação, iremos escrever o aberto básico $W(h,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon)$ na forma $W(h,h_1,...,h_n,\varepsilon)$.

Proposição 4.1. *Considere $W = W(0,h_1,...,h_m,\varepsilon)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Então existe $n \geq n_0$ tal que $\sqrt{n}\, e_n \in W$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que para qualquer $n \geq n_0$ temos $\sqrt{n}\, e_n \notin W$. Como

$$W = \{h \in \mathcal{H} : \ |\langle h, h_i \rangle| < \varepsilon \quad i = 1,...,m\},$$

para cada $n \geq n_0$ deve existir $j \in \{1,...,m\}$ tal que

$$|\left\langle \sqrt{n}\, e_n, h_j \right\rangle| \geq \varepsilon,$$

e, já que estamos trabalhando com números positivos, vale

$$|\left\langle \sqrt{n}\, e_n, h_j \right\rangle|^2 \geq \varepsilon^2.$$

Portanto como

$$|\left\langle \sqrt{n}\, e_n, h_j \right\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |\left\langle \sqrt{n}\, e_n, h_i \right\rangle|^2,$$

conclui-se que

$$\sum_{i=1}^{m} |\left\langle \sqrt{n}\, e_n, h_i \right\rangle|^2 \geq \varepsilon^2,$$

e consequentemente para qualquer $n \geq n_0$ teremos

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{n}. \tag{4.1}$$

Logo somando em n temos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 \geq \sum_{n\geq n_0} \sum_{i=1}^{m} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 \geq \sum_{n\geq n_0} \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2 \sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n} = \infty,$$

ou seja, esta série diverge.

Mas note que ao mesmo tempo vale que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |\langle e_n, h_i \rangle|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle e_n, h_i \rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, h_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|h_i\|^2 < \infty,$$

um absurdo pois vimos que esta série diverge. □

Proposição 4.2. *Nenhuma sequência da forma* $(\sqrt{n_k}\, e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para zero na topologia fraca.*

Demonstração: Temos dois casos. Primeiramente suponha que a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seja limitada, ou seja, o conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ é finito. Suponha que este conjunto possua m elementos.

Vimos no Corolário 2.9 que se a família de funcionais que define a topologia fraca separa pontos do espaço então a topologia fraca satisfaz alguns axiomas de separação. Em particular ela satisfaz T_1. Sabemos que, de modo geral, o dual de um espaço vetorial normado separa pontos deste espaço, e isto é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach. Assim a topologia $\sigma(\mathcal{H},\mathcal{H}^*)$ é T_1.

Sabemos que um espaço topológico ser T_1 é equivalente a ter seus pontos fechados. Portanto o conjunto

$$V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\sqrt{n_k}\, e_k\},$$

é fechado por ser união finita de fechados. E, como nenhum elemento de V é nulo temos que o complementar de V é um aberto que contém zero e não contém nenhum elemento da sequência $(\sqrt{n_k}\, e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, portanto segue o resultado.

Agora vamos analisar o caso em que a sequência de índices não é limitada, ou seja,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} n_k = \infty.$$

Suponha por absurdo que exista uma sequência da forma $(\sqrt{n_k}\, e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para 0 na topologia fraca. Então em particular para qualquer aberto da forma $W(0,h,\varepsilon)$, com $h \in \mathcal{H}$, deve existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sqrt{n_k}\, e_{n_k} \in W(0,h,\varepsilon),$$

o que siginifica que $|\langle \sqrt{n_k}\, e_{n_k}, h\rangle| < \varepsilon$. Mas isso é equivalente a dizer que

$$\lim_{k\to\infty} |\langle \sqrt{n_k}\, e_{n_k}, h\rangle| = 0, \tag{4.2}$$

para qualquer $h \in \mathcal{H}$.

Considere então a família de funcionais $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ onde $\phi_k(h) = \langle h, \sqrt{n_k}\, e_{n_k}\rangle$ (para cada $h \in \mathcal{H}$). Assim, a equação (4.2) acima nos diz que

$$\lim_{k\to\infty} |\phi_k(h)| = 0,$$

como esta é uma sequência convergente em $\mathbb{K}$ e consequentemente limitada, temos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\phi_k(h)| < \infty,$$

para cada $h \in \mathcal{H}$.

Portanto pelo Teorema de Banach-Steinhauss (Limitação Uniforme) concluímos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty, \tag{4.3}$$

absurdo, pois pelo Lema de representação de Riesz temos

$$\|\phi_k\| = \|\sqrt{n_k}\, e_{n_k}\| = \sqrt{n_k} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

e já que a sequência de índices é ilimitada teríamos que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\| = \infty$ o que contraria a limitação em (4.3) acima.

Concluímos então que de fato nenhuma sequência da forma $(\sqrt{n_k}\, e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para zero na topologia fraca. $\square$

Note que pela Proposição 4.1 a origem é um ponto de acumulação do conjunto $\{\sqrt{n}\, e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mas, apesar disso, pela Proposição 4.2 nenhuma sequência de elementos deste conjunto converge fracamente para zero.

Os resultados acima ainda mostram que a topologia fraca de $\mathcal{H}$ não é E_1, ou seja, ela não possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Veja que, em particular, a topologia fraca de $\mathcal{H}$ não é metrizável.

Apesar do que acabamos de ver, sabemos pelo Teorema 1.12 que é possível encontrar uma rede contida em $\{\sqrt{n}\, e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e fracamente convergente para zero. Vamos exibir uma rede deste tipo.

Seja Λ_0 o conjunto das vizinhanças fracamente abertas de zero e considere o conjunto

$$J = \{(n,U) :\ U \in \Lambda_0;\ n \in \mathbb{N};\ \sqrt{n}\, e_n \in U\},$$

ordenado da seguinte forma:

$$(n_1,U_1) \geq (n_2,U_2) \Leftrightarrow n_1 \geq n_2 \text{ e } U_1 \subset U_2.$$

Veja que a ordem parcial acima torna J dirigido por causa da Proposição 4.1. De fato, dados $(n_1,U_1),(n_2,U_2) \in J$ se considerarmos $U_0 = U_1 \cap U_2 \in \Lambda_0$ temos pela Proposição 4.1 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq \max\{n_1,n_2\}$ e ainda $\sqrt{n_0}\, e_{n_0} \in U_0$. Ou seja, $(n_0,U_0) \geq (n_1,U_1)$ e $(n_0,U_0) \geq (n_2,U_2)$.

Assim, para cada índice $j = (n,U)$ em J seja $y_j = \sqrt{n}\, e_n \in U$. Vamos mostrar que a rede $(y_j)_{j\in J}$ converge fracamente para zero. Tome $U \in \Lambda_0$. Pela Proposição

4.1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j_0 = (n_0, U) \in J$. Seja $j = (n, V)$ um índice em J tal que $j \geq j_0$, então vale

$$y_j = \sqrt{n}\, e_n \in V \subset U.$$

Ou, em outras palavras

$$y_j \xrightarrow{w} 0.$$

4.2 Compacidade

Vimos, pelo Teorema de Alaoglu (Teorema 3.10), que no dual de um espaço normado X o conjunto B_{X^*} é w^*-compacto. Sabemos que em espaços métricos as noções de compacto e sequencialmente compacto são equivalentes, mas veremos agora que isso não vale para a topologia fraca estrela.

Proposição 4.3. *Seja l_∞ o espaço de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty.$$

Sabemos que o supremo acima define uma norma $\|\cdot\|_\infty$ em l_∞.

Então o conjunto $B_{l_\infty^*}$ não é sequencialmente compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Dado $k \in \mathbb{N}$, considere a projeção canônica $\pi_k : l_\infty \longrightarrow \mathbb{K}$. Ou seja, para cada sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em l_∞ temos que $\pi_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_k$. É trivial que π_k é linear, e como para todo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ temos

$$|\pi_k(x)| = |x_k| \leq \|x\|_\infty,$$

vale que $\|\pi_k\| \leq 1$. Portanto, a família $\{\pi_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ está contida em $B_{l_\infty^*}$.

Se $B_{l_\infty^*}$ fosse w^*-sequencialmente compacto então existiria uma subsequência $(\pi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e um funcional ϕ de $B_{l_\infty^*}$ tais que

$$\pi_{k_j} \xrightarrow{w^*} \phi.$$

Veja, se isso fosse verdade então teríamos, pela Proposição 2.6, que qualquer sequência $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em l_∞ possui $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ como subsequência convergente, pois valeria

$$\pi_{k_j}(x) = x_{k_j} \longrightarrow \phi(x).$$

Isso é claramente um absurdo pois, se para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \in \{k_j : j \text{ é par}\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então a sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pertence a l_∞ e a subsequência $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ é dada por $(0,1,0,1,0,1,...)$, que não é convergente. $\square$

Observação 4.4. Note que nesta seção usamos a topologia fraca estrela e não a fraca. Isso se deve ao fato de que na topologia fraca, apesar desta não ser metrizável, um conjunto é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto. Este é o Teorema de Eberlein-Smulian, cuja demonstração pode ser encontrada em [2], Pg. 248, Teorema 2.8.6.

4.3 Categoria de Baire

O Teorema de Categorias de Baire nos diz que qualquer espaço métrico completo não vazio é de segunda categoria. Logo, este não pode ser escrito como união enumerável de conjuntos raros. Veremos nesta seção que tanto um espaço de Banach de dimensão infinita munido da topologia fraca como seu dual munido da topologia fraca estrela são de primeira categoria. Note que, como $\mathbb{K}$ é completo, temos que o dual de qualquer espaço normado sobre $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach. Portanto, o dual de um espaço normado sempre é de segunda categoria com relação à topologia da norma.

Lema 4.5. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita sobre $\mathbb{K}$. Então valem*

(i) Toda bola fechada em $(X, \sigma(X, X^*))$ é um conjunto raro.

(ii) Toda bola fechada em $(X^*, \sigma(X^*, X))$ é um conjunto raro.

Demonstração: Para mostrar (i) considere $B[x, r_1]$ uma bola fechada em X de centro x e raio $r_1 > 0$. Queremos mostrar que o interior do fecho desta bola é vazio. Suponha, por absurdo, que exista um ponto y pertencente a $int(\overline{B[x, r_1]})$. Então, por definição, existe um aberto básico $W(y, \phi_1, ..., \phi_n, \varepsilon_1)$ tal que

$$y \in W(y, \phi_1, ..., \phi_n, \varepsilon_1) \subset \overline{B[x, r_1]}. \tag{4.4}$$

Porém, pelo Corolário 3.6, o conjunto $B[x,r_1]$ é w-fechado o que implica que $B[x,r_1] = \overline{B[x,r_1]}$ (na topologia fraca). Como X possui dimensão infinita temos que X^* também é um espaço de dimensão infinita, portanto, pela Proposição 2.14, o aberto básico $W(y,\phi_1,...,\phi_n,\varepsilon_1)$ é ilimitado em norma e assim a equação (4.4) acima implica que a bola $B[x,r_1]$ é ilimitada em norma, um absurdo.

Analogamente, para mostrar (ii) considere $B[x^*,r_2]$ uma bola fechada em X^* de centro x^* e raio $r_2 > 0$. Se, por absurdo, existisse z^* pertencente a $int(\overline{B[x^*,r_2]})$ então existiria $W(z^*,x_1,...,x_n,\varepsilon_2)$ tal que

$$z^* \in W(z^*,x_1,...,x_n,\varepsilon_2) \subset \overline{B[x^*,r_2]}. \tag{4.5}$$

Note que, pela Proposição 3.11, o conjunto $B[x^*,r_2]$ é w^*-fechado o que implica que $B[x^*,r_2] = \overline{B[x^*,r_2]}$ (na topologia fraca estrela). Veja ainda que $i[X]$ possui dimensão infinita, já que X possui dimensão infinita, então a Proposição 2.14 implica que o aberto básico $W(z^*,x_1,...,x_n,\varepsilon_2)$ é ilimitado em norma. Logo, a equação (4.5) acima nos diz que $B[x^*,r_2]$ é ilimitado em norma, e novamente temos um absurdo. □

Teorema 4.6. *Seja X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Então valem*

(i) O espaço $(X,\sigma(X,X^*))$ é de primeira categoria.

(ii) O espaço $(X^*,\sigma(X^*,X))$ é de primeira categoria.

Demonstração: Note que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B[0,n] \quad \text{e} \quad X^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B[0^*,n],$$

onde 0 e 0^* são as origens de X e X^* respectivamente.

Portanto, pelo lema anterior, ambos são espaços que podem ser escritos como união enumerável de conjuntos raros. Logo, ambos são de primeira categoria. □

4.4 Continuidade e a propriedade de Schur

Nesta seção exibiremos uma função entre espaços vetoriais topológicos que não é contínua mas é sequencialmente contínua. Mais precisamente, iremos exibir uma função f, com domínio e contradomínio em espaços vetoriais topológicos, tal que a sentença abaixo é verdadeira

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x),$$

para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para x no domínio de f. Mas, apesar disso, f não é contínua. Ou seja, a caracterização de funções contínuas por sequências não é válida em espaços topológicos em geral.

No que segue precisaremos da definição abaixo:

Definição 4.7. *Seja X um espaço normado tal que, para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e qualquer ponto x em X, vale que*

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,$$

ou seja, a convergência fraca implica na convergência em norma. Então dizemos que X é Schur, ou ainda que X satisfaz a propriedade de Schur.

Assim, provaremos o resultado abaixo, que apareceu pela primeira vez em um artigo de J. Schur em 1920.

Proposição 4.8. *O espaço l_1 satisfaz a propriedade de Schur.*

Demonstração: Considere uma sequência $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ e um ponto x em l_1 onde

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{e} \qquad x^k = (x^k_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Suponha que $x^k \xrightarrow{w} x$ e vamos mostrar que $x^k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$. Veja, se $y^k = x^k - x$ para cada $k \in \mathbb{N}$, estamos supondo que $y^k \xrightarrow{w} 0$ e queremos mostrar que $y^k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$.

Faremos a demonstração supondo que, por absurdo, não vale a convergência em norma. Se $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ não converge em norma para zero então existe $r > 0$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $k_j > j$ satisfazendo

$$r \leq \|y^{k_j}\|_1.$$

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $z^j = y^{k_j}$ e note que $r \leq \|z^j\|_1$ e ainda que a sequência $(z^j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaz:

$$\phi(z^j) \longrightarrow 0 \qquad \forall \phi \in l_1^*,$$

ou seja, $z^j \xrightarrow{w} 0$.

Seja $j_1 = 1$. Sabemos que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n^{j_1}| = \|z^{j_1}\|_1$, portanto, podemos escolher um número natural $N_1 > 0$ tal que

$$\sum_{n>N_1} |z_n^{j_1}| < \frac{r}{4},$$

veja que isto implica que

$$\sum_{n=1}^{N_1} |z_n^{j_1}| = \|z^{j_1}\|_1 - \sum_{n>N_1} |z_n^{j_1}| > r - \frac{r}{4} = \frac{3r}{4}.$$

Agora, para cada $n = 1, ..., N_1$, a projeção π_n é um elemento de l_1^* e, portanto, vale que $\pi_n(z^j) \longrightarrow 0$. Logo, podemos encontrar $j_2 > j_1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{N_1} |z_n^{j_2}| < \frac{r}{8},$$

e ainda, como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n^{j_2}| = \|z^{j_2}\|_1$, podemos encontrar $N_2 > N_1$ tal que

$$\sum_{n>N_2} |z_n^{j_2}| < \frac{r}{8},$$

o que implica que

$$\sum_{n=N1+1}^{N_2} |z_n^{j_2}| = \|z^{j_2}\|_1 - \sum_{n=1}^{N_1} |z_n^{j_2}| - \sum_{n>N_2} |z_n^{j_2}| > r - \frac{r}{8} - \frac{r}{8} = \frac{3r}{4}.$$

De forma análoga, como as projeções π_n com $n = 1, ..., N_2$ são elementos de l_1^*, podemos encontrar $j_3 > j_2$ tal que

$$\sum_{n=1}^{N_2} |z_n^{j_3}| < \frac{r}{8},$$

e ainda, como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n^{j_3}| = \|z^{j_3}\|_1$, existe $N_3 > N_2$ tal que

$$\sum_{n>N_3} |z_n^{j_3}| < \frac{r}{8},$$

o que implica que

$$\sum_{n=N2+1}^{N_3} |z_n^{j_3}| = \|z^{j_3}\|_1 - \sum_{n=1}^{N_2} |z_n^{j_3}| - \sum_{n>N_3} |z_n^{j_3}| > r - \frac{r}{8} - \frac{r}{8} = \frac{3r}{4}.$$

Se continuarmos este processo, definindo $N_0 = 0$, teremos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existem j_k e $N_{k-1} < N_k$ em $\mathbb{N}$ tais que, definindo $M_k = \{N_{k-1}+1,...,N_k\}$, vale

$$\sum_{n\in M_k} |z_n^{j_k}| > \frac{3r}{4} \quad \text{e} \quad \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M_k} |z_n^{j_k}| < \frac{r}{4}. \tag{4.6}$$

Veja, a sequência $N_0, N_1, N_2, N_3, ...$ que contruímos é estritamente crescente, logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_{k-1} < \ n \ \leq N_k,$$

e, a partir disso, definir o elemento γ_n em $\mathbb{K}$ tal que $|\gamma_n| = 1$ e ainda

$$\gamma_n \, z_n^{j_k} = |z_n^{j_k}|.$$

Note que, nestas condições, a sequência $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um elemento de $l_\infty = l_1^*$. Agora, fixe k em $\mathbb{N}$ e veja que

$$\begin{aligned} |\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \, z_n^{j_k}| &\geq |\sum_{n\in M_k} \gamma_n \, z_n^{j_k}| - |\sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M_k} \gamma_n \, z_n^{j_k}| \\ &= \sum_{n\in M_k} |z_n^{j_k}| - |\sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M_k} \gamma_n \, z_n^{j_k}| \\ &\geq \sum_{n\in M_k} |z_n^{j_k}| - \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M_k} |\gamma_n \, z_n^{j_k}| \\ &\overset{(*)}{>} \frac{3r}{4} - \frac{r}{4} = \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

onde $(*)$ vale pelas desigualdades em (4.6) acima e pelo fato de termos $|\gamma_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se ψ é o funcional de l_1^* associado à sequência $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos que

$$|\psi(z^{j_k})| > \frac{r}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo, a sequência $(\psi(z^{j_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ não converge para zero em $\mathbb{K}$. Um absurdo pois, por hipótese, $z^j \xrightarrow{w} 0$. □

Por fim, temos o que é necessário para construir o contraexemplo desta seção. Considere a identidade:

$$\begin{aligned} I: \ (l_1, \sigma(l_1, l_1^*)) &\longrightarrow (l_1, \mathfrak{T}_{\|\cdot\|_1}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto I((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

e note que I não é contínua pois, caso contrário, teríamos que a topologia fraca de l_1 coincide com a topologia da norma deste espaço. Veja que, pelo Teorema 3.3, isso só seria verdade se l_1 tivesse dimensão finita, o que não acontece.

Apesar disso I é sequencialmente contínua pois, como l_1 é Schur, para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em l_1 tal que

$$x_n \xrightarrow{w} x,$$

para algum x em l_1, temos que

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x,$$

o que significa que

$$I(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} I(x),$$

ou seja, I é sequencialmente contínua.

Referências Bibliográficas

[1] G. HELMBERG, Curiosities concerning weak topology in Hilbert Space. American Mathematical Monthly **113** (5) (2006), 447-452.

[2] R.E. MEGGINSON, An introduction to Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics **183**, Springer, New York, (1998).

[3] E.O. KREYSZIG, Introductory Functional Analysis with Applications. Whiley, (1989), ISBN 0471504599.

[4] O. ALAS, L. JUNQUEIRA, M. PASSOS E A. TOMITA, Topologia Geral, Notas de Aula.

[5] J. R. MUNKRES Topology. Second Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, ISBN 0131816292.